



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Beregning af snitkræfter i lige, tværbelastede, statisk bestemte bjælker

Rathkjen, Arne

Publication date:
1997

Document Version
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Rathkjen, A. (1997). *Beregning af snitkræfter i lige, tværbelastede, statisk bestemte bjælker*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Bind U9705

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AAU • AALBORG • DANMARK

TEAM 1997.2

A. RATHKJEN

BEREGNING AF SNITKRÆFTER I LIGE, TVÆRBELASTEDE, STATISK
BESTEMTE BJÆLKER

JULI 1997

ISSN 1395-8232 U9705

1. INDLEDNING

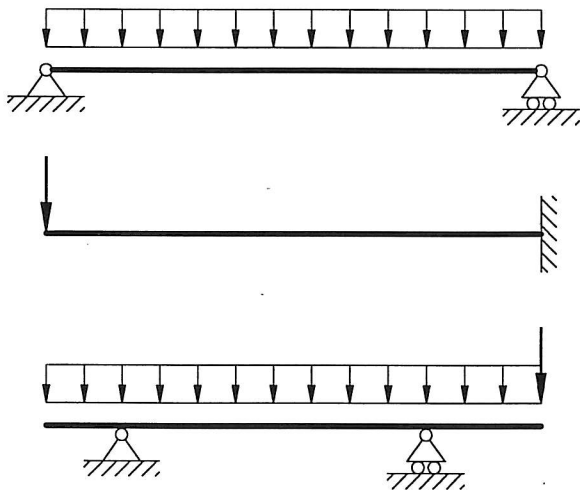
Når en konstruktion er statisk bestemt, kan reaktioner og snitkræfter bestemmes ved hjælp af ligevægtsligninger alene, og til beregning af snitkræfter kan man benytte en fremgangsmåde, hvor man først beregner reaktionerne og derefter snitkræfterne.

Benyttes såkaldte håndregninger under anvendelse af papir, blyant, lommeregner og hjernekraft, kan man i mange tilfælde udvælge de ligninger, der skal anvendes, og den rækkefølge hvori de skal anvendes, så der i hver ligning kun optræder en eller nogle få ukendte. Anderledes stiller sagen sig, når man vil benytte en EDB-maskine til at udføre regnearbejdet. Fremgangsmåden må da systematiseres i en sådan grad, at konsekvensen bliver, at maskinen må opstille og løse et ligningssystem med p ligninger og p ukendte, hvor p er antallet af reaktioner.

Den følgende fremstilling er begrænset til bjælker, som foruden at være statisk bestemte også er lige, plane og tværbelastede. Lige betyder med retliniet bjælkeakse, plane betyder, at alle kræfter på bjælken herunder reaktioner ligger i samme plan og alle momentvektorer er vinkelret på denne plan. Kun tværbelastede bjælker betragtes simpelthen for at holde antallet af udregninger nede og derved gøre det lettere at få et overblik over fremgangsmåden.

2. ELEMENTER OG KNUDEPUNKTER

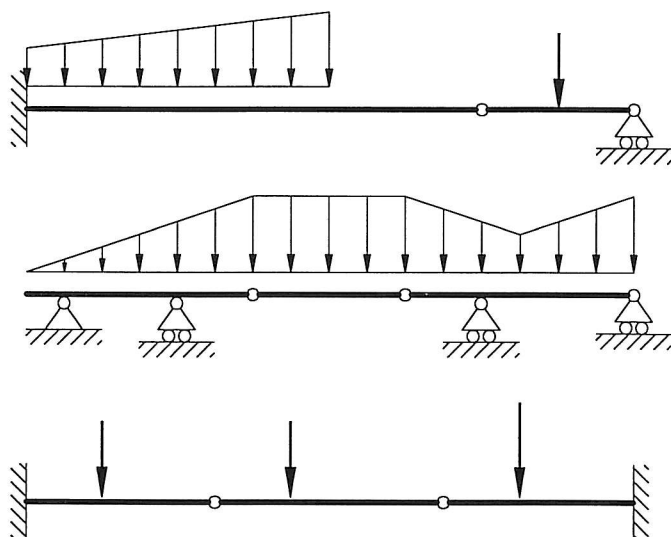
Figur 2.1 viser nogle statisk bestemte bjælker, hvis to reaktioner kan bestemmes alene



Figur 2.1

ved hjælp af ligevægtsligninger for hele systemet. Antallet af uafhængige ligevægtsligninger for hele systemet er, på grund af forudsætningen om tværbelastning alene, kun to, idet kræfternes projektionssum på en retning vinkelret på kraftretningen er nul.

For bjælkerne i figur 2.2 derimod er antallet af reaktioner større end to, og ligevægts-

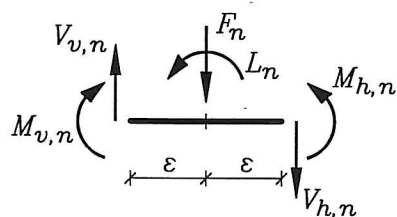


Figur 2.2

ligninger for hele systemet må suppleres med ligevægtsligninger som udtrykker, at momentet af de kræfter, der angriber bjælken på den ene side af et charniere, er nul i det pågældende charniere.

Bjælken deles først i *elementer* forbundet i *knudepunkter*, som nummereres fortløbende.

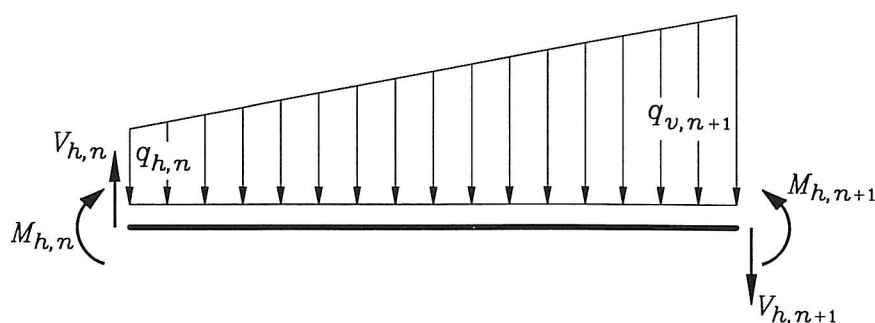
Et knudepunkt kan opfattes som et bjælkestykke med forsvindende længde 2ε , som vist i figur 2.3. Det n 'te knudepunkt påvirkes af de viste kræfter, belastning i form af



Figur 2.3

F_n og L_n samt snitkræfterne til venstre for knudepunktet V_v og M_v og snitkræfterne til højre for knudepunktet V_h og M_h .

Elementet, som forbinder knudepunkterne n og $n + 1$, er vist i figur 2.4. Påvirknin-



Figur 2.4

gen er, foruden de viste snitkræfter, hvis betegnelser allerede er indført, en linielast q som varierer lineært mellem knudepunkterne. Denne indskrænkning af lastbeskrivelsen betyder, at en vilkårlig belastning kun kan beskrives med tilnærmelse.

Man kan herefter slutte, at der skal findes knudepunkter i følgende punkter:

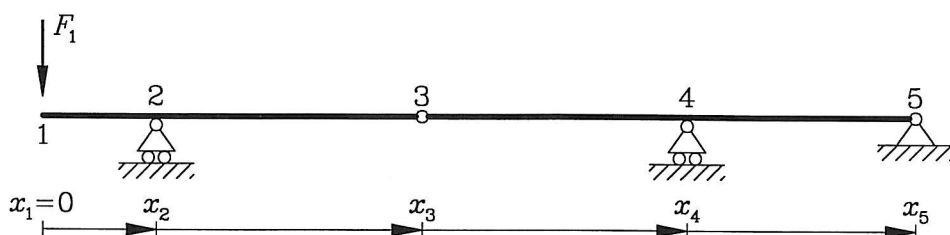
- hvor bjælken påvirkes af enkeltkræfter og enkeltmomenter herunder reaktioner,
- hvor der er spring eller knæk i linielasten,
- i charnierer hvor man ved, at snitmomentet er nul.

Det kan være nødvendigt at indlægge flere knudepunkter end begrundet i ovenstående; enten af hensyn til en bedre beskrivelse af belastningen eller af hensyn til en bedre bestemmelse af snitkræfterne.

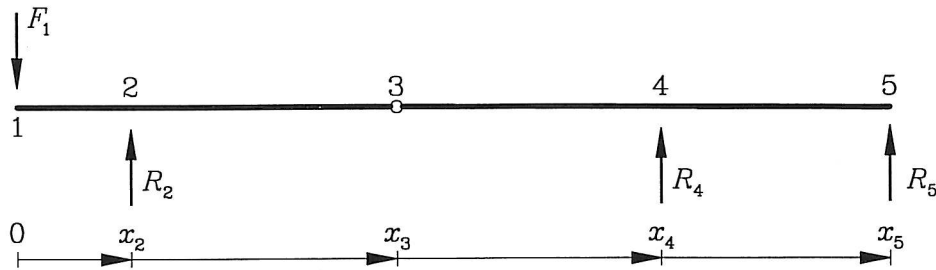
Beliggenheden af hvert enkelt knudepunkt angives ved dets afstand x_n fra bjælkens venstre endepunkt, som også er knudepunkt nr. 1.

3. REAKTIONER

Figur 3.1 viser en simpel, statisk bestemt bjælke med påførte knudepunktsnumre og afstande x_n . I figur 3.2 er understøtningssignaturerne "oversat" til kræfter og momenter.



Figur 3.1



Figur 3.2

Som den første ligevægtsligning vælges moment om charniet i knudepunkt 3 af kræfterne til venstre for charniet

$$F_1 x_3 - R_2(x_3 - x_2) = 0 \quad (3.1)$$

Som den anden og næstsidste ligevægtsligning vælges moment om højre endepunkt af bjælken, knudepunkt 5, af alle kræfter på bjælken

$$F_1 x_5 - R_2(x_5 - x_2) - R_4(x_5 - x_4) = 0 \quad (3.2)$$

Endelig vælges moment om venstre endepunkt, knudepunkt 1, af alle kræfter på bjælken som den tredje og sidste ligevægtsligning

$$R_2 x_2 + R_4 x_4 + R_5 x_5 = 0 \quad (3.3)$$

De tre ligninger kan skrives

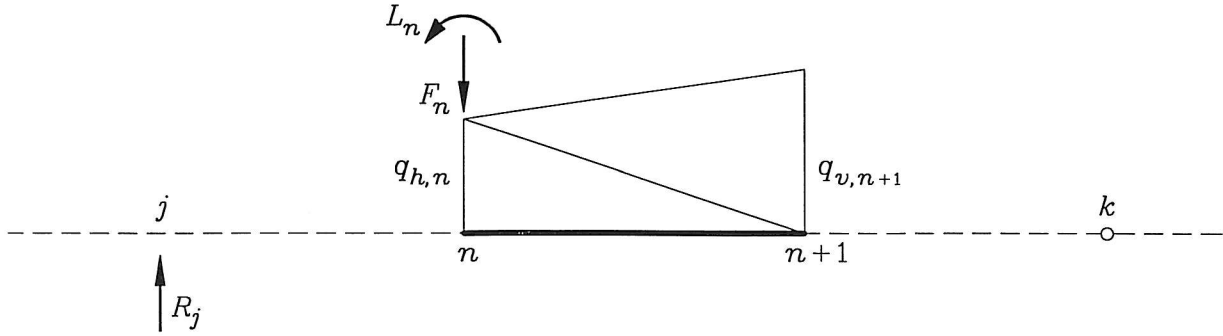
$$\begin{bmatrix} x_3 - x_2 & 0 & 0 \\ x_5 - x_2 & x_5 - x_4 & 0 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 x_3 \\ F_1 x_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

som er en speciel udgave af den mere generelle matrixligning

$$[A_k^j] [R_j] = [B_k] \quad (3.5)$$

Den næste opgave er derfor at opstille generelle udtryk til bestemmelse af elementerne A_k^j i den kvadratiske koefficientmatrix $[A_k^j]$ og elementerne B_k i søjlematricen $[B_k]$. Koefficientmatricen $[A_k^j]$ indeholder koefficienterne til de ukendte reaktioner R_j , som er samlet i søjlematricen $[R_j]$, mens søjlematricen $[B_k]$ indeholder bidrag fra belastningen på bjælken.

Figur 3.3 viser et bjælkestykke. Kun reaktionen R_j i knudepunkt j , kraften F_n og momentet L_n i knudepunkt n , linieasten q på elementet mellem knudepunkterne n og $n+1$ samt charnieret i knudepunkt k er anført.



Figur 3.3

Moment om knudepunkt k af kræfterne til venstre for knudepunktet giver

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=1}^{k-1} R_j(x_k - x_j) - \sum_{n=1}^{k-1} L_n - \sum_{n=1}^{k-1} F_n(x_k - x_n) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2} q_{h,n}(x_{n+1} - x_n) \left(x_k - x_n - \frac{1}{3}(x_{n+1} - x_n) \right) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2} q_{v,n+1}(x_{n+1} - x_n) \left(x_k - x_n - \frac{2}{3}(x_{n+1} - x_n) \right)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

som omskrives til

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=1}^{k-1} R_j(x_k - x_j) - \sum_{n=1}^{k-1} L_n - \sum_{n=1}^{k-1} F_n(x_k - x_n) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2} (q_{h,n} + q_{v,n+1})(x_{n+1} - x_n)(x_k - x_n) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{1}{6} q_{h,n} + \frac{1}{3} q_{v,n+1} \right) (x_{n+1} - x_n)^2
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

I disse udtryk skal R_j sættes lig nul i ikke-understøttede knudepunkter.

Af (3.7) fås

$$A_k^j = x_k - x_j \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{n=1}^{k-1} L_n - \frac{1}{6}(q_{h,n} + 2q_{v,n+1})(x_{n+1} - x_n)^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{k-1} \left(F_n + \frac{1}{2}(q_{h,n} + q_{v,n+1})(x_{n+1} - x_n) \right) (x_k - x_n)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Disse udtryk gælder for alle charnierer samt højre bjælkeendepunkt.

For venstre bjælkeendepunkt har man

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^m R_j x_j + \sum_{n=1}^m L_n - \sum_{n=1}^m F_n x_n \\
&\quad - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2} q_{h,n} (x_{n+1} - x_n) \left(x_n + \frac{1}{3} (x_{n+1} - x_n) \right) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2} q_{v,n+1} (x_{n+1} - x_n) \left(x_n + \frac{2}{3} (x_{n+1} - x_n) \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

eller

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^m R_j x_j + \sum_{n=1}^m L_n - \sum_{n=1}^m F_n x_n \\
&\quad - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2} (q_{h,n} + q_{v,n+1}) (x_{n+1} - x_n) x_n \\
&\quad - \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{1}{6} q_{h,n} + \frac{1}{3} q_{v,n+1} \right) (x_{n+1} - x_n)^2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

hvor m er nummeret på højre bjælkeendepunkt.

Af (3.11) fås

$$A_1^j = x_j \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{n=1}^m (F_n x_n - L_n) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2} (q_{h,n} + q_{v,n+1}) (x_{n+1} - x_n) x_n
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{6} (q_{h,n} + 2q_{v,n+1}) (x_{n+1} - x_n)^2 \quad (3.13)$$

EDB-programmer til løsning af matrixligninger som (3.5) er praktisk taget altid opbygget på en sådan måde, at de ukendte størrelser nummereres fortløbende fra 1 til p , hvor p er antallet af ukendte. Ligningssystemet (3.5) skulle derfor have følgende udseende:

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^p \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_p^1 & A_p^2 & \dots & A_p^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

som ikke stemmer overens med udtrykkene (3.6) – (3.13) med hensyn til nummerering. Konsekvensen af denne uoverensstemmelse er, at der må foretages en omnummerering. De p knudepunkter, hvorom der opstilles momentligninger, betegnes

$$k1, k2, k3 \dots kr \dots kp \quad (3.15)$$

og de p reaktionsstørrelser betegnes

$$R_{j1}, R_{j2}, R_{j3} \dots R_{js} \dots R_{jp} \quad (3.16)$$

I eksemplet i begyndelsen af dette afsnit er således

$$\begin{aligned} k1 &= 3, \quad k2 = 5, \quad k3 = 1 \\ j1 &= 2, \quad j2 = 4, \quad j3 = 5 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Man kan nu udregne A_{kr}^{js} og B_{kr} og sætte

$$\begin{aligned} C_r^s &= A_{kr}^{js} \\ D_r &= B_{kr} \end{aligned} \quad (3.18)$$

opstille og løse ligningssystemet

$$[C_r^s] [Y_s] = [D_r] \quad (3.19)$$

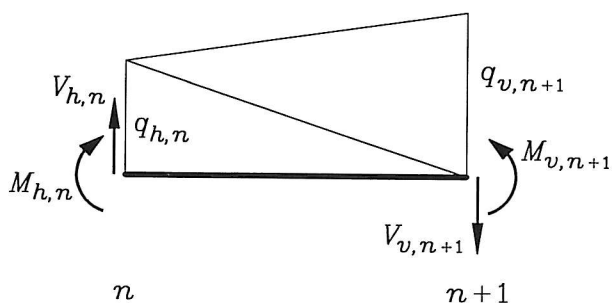
for endelig at sætte

$$R_{js} = Y_s \quad (3.20)$$

4. SNITKRÆFTER

Når reaktionerne er bestemt, er alle kræfter og momenter på bjælken kendt og snitkræfterne kan uden videre udregnes fra den ene ende af bjælken til den anden.

Af figur 4.1 får man ved projektion på lodret



Figur 4.1

$$V_{v,n+1} - V_{h,n} + \frac{1}{2}(q_{h,n} + q_{v,n+1})(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (4.1)$$

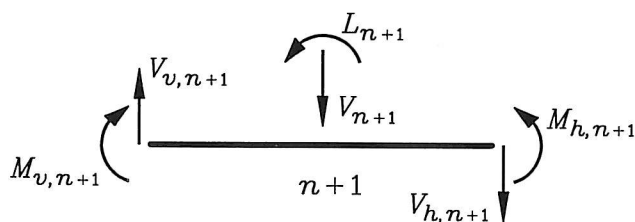
og ved moment om knudepunkt $n + 1$

$$M_{v,n+1} - M_{h,n} - V_{h,n}(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}\left(q_{h,n} \cdot \frac{2}{3} + q_{v,n+1} \frac{1}{3}\right)(x_{n+1} - x_n)^2 = 0 \quad (4.2)$$

og dermed

$$\begin{aligned} V_{v,n+1} &= V_{h,n} - \frac{1}{2}(q_{h,n} + q_{v,n+1})(x_{n+1} - x_n) \\ M_{v,n+1} &= M_{h,n} + V_{h,n}(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{6}(2q_{h,n} + q_{v,n+1})(x_{n+1} - x_n)^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Af figur 4.2 får man tilsvarende ved projektions- og momentligninger



Figur 4.2

$$\begin{aligned} V_{h,n} &= V_{v,n} - F_n \\ M_{h,n} &= M_{v,n} - L_n \end{aligned} \quad (4.4)$$

hvor

$$F_n = -R_n \quad (4.5)$$

i understøtningspunkterne.

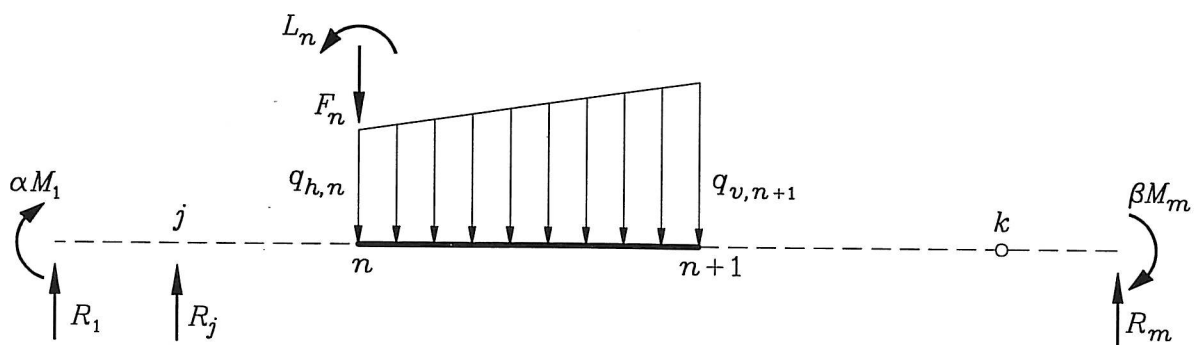
5. INDSPÆNDINGSMOMENTER

De bjælker, der hidtil har været betragtet, har alle været understøttet udelukkende på simple understøtninger, som ikke overfører momenter mellem bjælke og understøtning. I bjælkeenderne kan der imidlertid også forekomme faste indspændinger, hvilket medfører at koefficientmatricen må modificeres.

Der er tre muligheder for indspændingsmomenter

- indspænding alene i venstre bjælkeende (knudepunkt 1)
- indspænding alene i højre bjælkeende (knudepunkt m)
- indspænding i begge bjælkeender

De tre tilfælde behandles under et, idet bjælken påføres de to indspændingsmomenter αM , og βM_m , hvor α og β kan have værdierne 0 og 1, se figur 5.1



Figur 5.1

Moment om charniet i knudepunkt k giver

$$\alpha M_1 + \sum_{j=1}^{k-1} R_j (x_k - x_j) = B_k \quad (5.1)$$

hvor B_k er bestemt ved (3.9). Moment om højre bjælkeendepunkt giver

$$\alpha M_1 + \beta M_m + \sum_{j=1}^{m-1} R_j(x_k - x_j) = B_k \quad (5.2)$$

mens moment om venstre bjælkeendepunkt giver

$$-\alpha M_1 - \beta M_m + \sum_{j=1}^m R_j x_j = B_1 \quad (5.3)$$

hvor B_1 er bestemt ved (3.13).

Vælger man i tilfælde a) at anbringe M_1 som den sidste ukendte reaktion i søjlematricen med reaktioner, skal elementerne i sidste søjle i koefficientmatricen være 1 bortset fra sidste række, hvor elementet skal være -1.

Vælger man i tilfælde b) at anbringe M_m som den sidste ukendte reaktion, skal elementerne i sidste søjle i koefficientmatricen være 0 bortset fra næstsidste række, hvor elementet skal være 1 og sidste række, hvor det skal være -1.

Vælger man endelig i tilfælde c) at anbringe M_1 som den næstsidste og M_m som den sidste ukendte reaktion, skal næstsidste søjle være som sidste søjle under tilfælde a) og sidste søjle som sidste søjle under tilfælde b).

I alle tre tilfælde bliver de øvrige koefficienter A_k^j som angivet ved (3.8) og (3.12).

Ved beregning af snitkræfter sættes

$$L_1 = -M_1 \quad \text{og} \quad L_m = -M_m \quad (5.4)$$

i lighed med (4.5), hvorefter (4.3) og (4.4) kan benyttes.